Merkblatt 12-2017

Standardabweichung vs. Toleranz

Fachautoren: Heiner Kuhlmann
Christian Hesse
Christoph Holst

Beteiligte Gremien: DVW Arbeitskreis 4 Ingenieurgeodäsie
DVW Arbeitskreis 3 Messmethoden und Systeme

Beschlussfassung: Beschlossen von DVW Arbeitskreis 3 am 14.10.2016
Beschlossen von DVW Arbeitskreis 4 am 03.11.2016
Verabschiedet vom Präsidium des DVW am 24.09.2017

Dokumentenstatus:
verabschiedet

1. Einleitung

Dieses Papier dient dazu, einige unterschiedliche quantitative Begriffe zur Genauigkeit in Beziehung zueinander zu setzen. Insbesondere wird der Übergang von den Maßen, die die Funktionsfähigkeit eines Werkstückes oder Bauteils sicherstellen (zulässige Abmaße, Toleranzen), zu den Maßen, die die Qualität des Messprozesses bei der Übertragung der Sollgeometrie charakterisieren (Standardabweichung), erläutert. Es wird herausgearbeitet, dass Toleranzen und Standardabweichungen strikt zu unterscheiden sind und dass die Frage, welches Messverfahren zur Einhaltung gewisser Genauigkeitsvorgaben verwendet werden sollte, ganz analytisch beantwortet werden kann.

2. Messunsicherheit

Bei jeder Messung treten zufällige Abweichungen ε und systematische Abweichungen δ auf. Dadurch unterscheidet sich der Messwert X vom wahren Wert $\tilde{X}$:

$$X - \tilde{X} = \delta + \varepsilon. \tag{1}$$

Die zufälligen Abweichungen, die mindestens im Rahmen der Auflösung schwanken, kennzeichnen die Präzision der Messung und die systematischen Abweichungen die Richtigkeit (Abb. 1). Die zufälligen Abweichungen mitteln sich bei einer großen Anzahl n an Wiederholungsmessungen heraus, bei unendlich vielen Messungen nähert sich damit der Mittelwert aus allen Messungen $\bar{X}$ dem Erwartungswert μ:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,, \quad n \longrightarrow \infty. \tag{2}$$

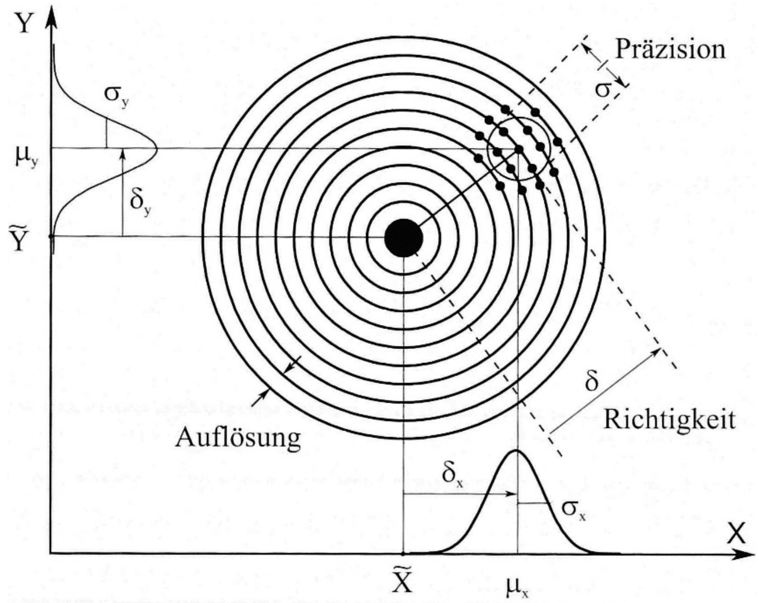

Abb. 1: Präzision, Auflösung und Richtigkeit einer Messung (hier für eine zweidimensionale Messgröße; Witte und Sparla, 2015, S. 690)

Sehr häufig – so auch in der Ingenieurgeodäsie – wird versucht, die systematische Abweichung δ durch Kalibrierung der Messinstrumente, eine geschickte Messanordnung oder durch einen geeigneten Auswerteprozess möglichst klein zu halten. Dieses gelingt allerdings nicht vollständig, sodass eine kleine restliche Systematik verbleibt. Diese wird dann allerdings als zufällig aufgefasst und mit den zufälligen Abweichungen gemeinsam betrachtet (Messabweichung).

Die Messabweichungen folgen unter bestimmten Voraussetzungen, die sehr häufig erfüllt sind, der Normalverteilung: die Wahrscheinlichkeit für positives und negatives Vorzeichen der Messabweichung ist gleich groß und kleine Messabweichungen sind häufiger als große Messabweichungen. Dann benötigt man nur die Standardabweichung σ, um die Genauigkeit der Messung zu beschreiben. σ ist durch theoretische Analyse des Messvorganges oder aus Erfahrungswerten bekannt oder empirisch zu ermitteln.

Das Ergebnis einer Messung (X bzw. $\bar{X}$ bei Mehrfachmessungen) stimmt aufgrund der o.a. Abweichungen nicht mit dem gesuchten Erwartungswert μ überein. Über die Standardabweichung (σ_X bzw. $\sigma_{\bar{X}}$ bei Mehrfachmessungen) lässt sich aber ein Intervall (Vertrauensintervall) formulieren, in dem μ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ liegt (siehe Abb. 2):

$$P\{X - k \cdot \sigma_X \leq \mu \leq X + k \cdot \sigma_X\} = 1 - \alpha, \tag{3}$$

$$P\{\bar{X} - k \cdot \sigma_{\bar{X}} \leq \mu \leq \bar{X} + k \cdot \sigma_{\bar{X}}\} = 1 - \alpha. \tag{4}$$

So liegt μ mit einer Wahrscheinlichkeit

- von 95.0% im Intervall von $\pm 1.96 \cdot \sigma_{\bar{X}}$ um $\bar{X}$ ($k = 1.96, \alpha = 5.0\%$),
- von 99.0% im Intervall von $\pm 2.58 \cdot \sigma_{\bar{X}}$ um $\bar{X}$ ($k = 2.58, \alpha = 1.0\%$),
- von 99.7% im Intervall von $\pm 3.00 \cdot \sigma_{\bar{X}}$ um $\bar{X}$ ($k = 3.00, \alpha = 0.3\%$).

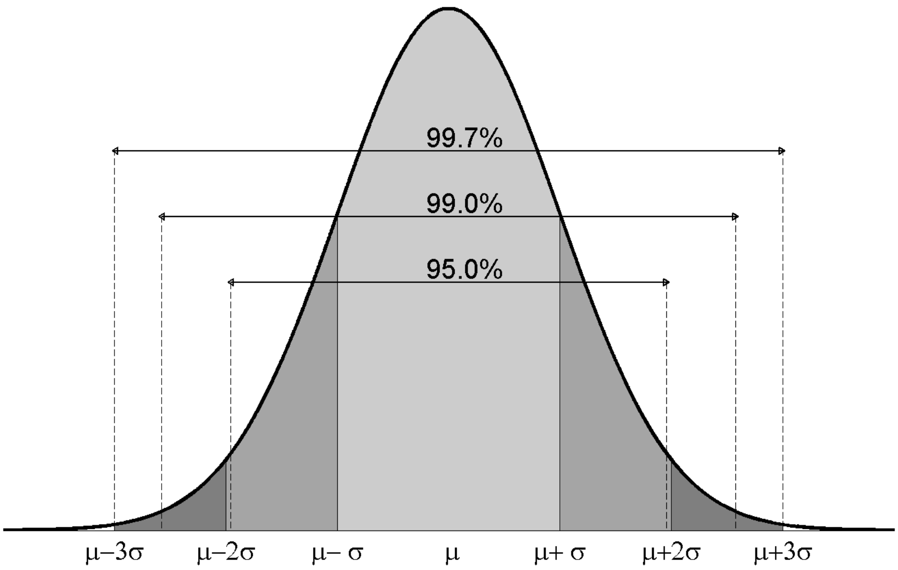

Abb. 2: Standardabweichung, Normalverteilung, Erwartungswert

Die Wahl von α hängt zum einen davon ab, wie kritisch eine größere tatsächliche Abweichung ist (Risikoabschätzung). Zum anderen spielt das Verhältnis von Messaufwand (kleineres σ bedeutet höhere

Kosten) zum Nachbesserungsaufwand (bspw. nachträgliche Ausrichtung einer bereits montierten Maschine) eine Rolle.

Anmerkung: Genauigkeitsangaben im Maschinenbau

Im Maschinenbau werden i.d.R. Sensoren verwendet, bei denen Messgenauigkeiten nicht als Standardabweichungen, sondern als Maximal Permissable Error (*MPE*) oder *MPE/2* angegeben werden. Diese beschreiben maximal zulässige Abweichungen vom wahren Wert einer Messung. Da diese Messabweichungen vom Messinstrument zwingend einzuhalten sind, gilt hier theoretisch eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0\%$. Beim *MPE* wird weiterhin nicht nach zufälligen und systematischen Abweichungen differenziert, wie in der Geodäsie üblich (siehe Gl. 1).

Unter zwei Annahmen lässt sich der *MPE* dennoch in eine Standardabweichung umrechnen: Die Messabweichungen sind genähert als zufällig anzusehen und für den MPE gilt eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.3\%$. Daraus folgt nach Abb. 2: $\sigma = \frac{MPE}{3}$.

3. Toleranzen und Abmaße

Maschinen und Bauwerke – oder auch Teile davon – werden geometrisch am Computer konstruiert. Die sich daraus ergebenden Maße werden als Sollmaße oder Nennmaße bezeichnet. Damit die Funktionsfähigkeit der Bauwerks- oder Maschinenteile noch gewährleistet ist, dürfen die nach der Herstellung real vorliegenden Maße von diesen Sollmaßen um bestimmte Beträge abweichen (oberes und unteres Abmaß A_o und A_u). Diese Maße resultieren also aus den Anforderungen an die Funktionsfähigkeit und nicht aus dem Messprozess.

Oberes und unteres Abmaß ergeben zusammen die Maßtoleranz T (siehe Abb. 3). Es sei hier kurz angemerkt, dass A_o und A_u nicht immer gleich groß sein müssen. Soll bspw. ein Werkstück in eine Bohrung eingefügt werden, darf es nur wenig größer als das Sollmaß sein, weil es sonst nicht mehr in die Bohrung passt. Ist es aber kleiner, führt dieses „nur“ zu einer Vergrößerung des Spiels. Da die Normalverteilung immer symmetrisch ist, können keine unterschiedlich großen Abmaße A_o und A_u durch die Standardabweichung beschrieben werden. Daher ist für die Ableitung der Standardabweichung aus der Maßtoleranz, die im Kapitel 4 besprochen wird, im Falle unterschiedlich großer Abmaße dann zunächst $T = 2 \cdot min\{A_u, A_o\}$ zu berechnen.

Mindestmaß G_u und Höchstmaß G_o ergeben sich aus dem Sollmaß und den o.g. Abmaßen A_u und A_o. Das Istabmaß A_i beschreibt die Abweichung zwischen Istmaß I und Nennmaß N bzw. Sollmaß S.

Aufgabe des Messprozesses bei der Einrichtung der Bauwerks- oder Maschinenteile ist es nun, die Genauigkeit so auszulegen, dass die zulässigen Abweichungen A_o und A_u eingehalten werden. Wie man sieht, taucht hier ein Problem auf: Während A_o und A_u zwingend einzuhalten sind, damit die Maschine oder das Bauwerk funktioniert (also 100% Sicherheit), kann man aufgrund der Unsicherheit der Messung, wie sie im Kapitel 2 dargestellt ist, nur Wahrscheinlichkeiten < 100% erreichen. Je weiter man sich 100% annähern will, desto kleiner muss σ sein, und die Messung wird damit immer teurer.

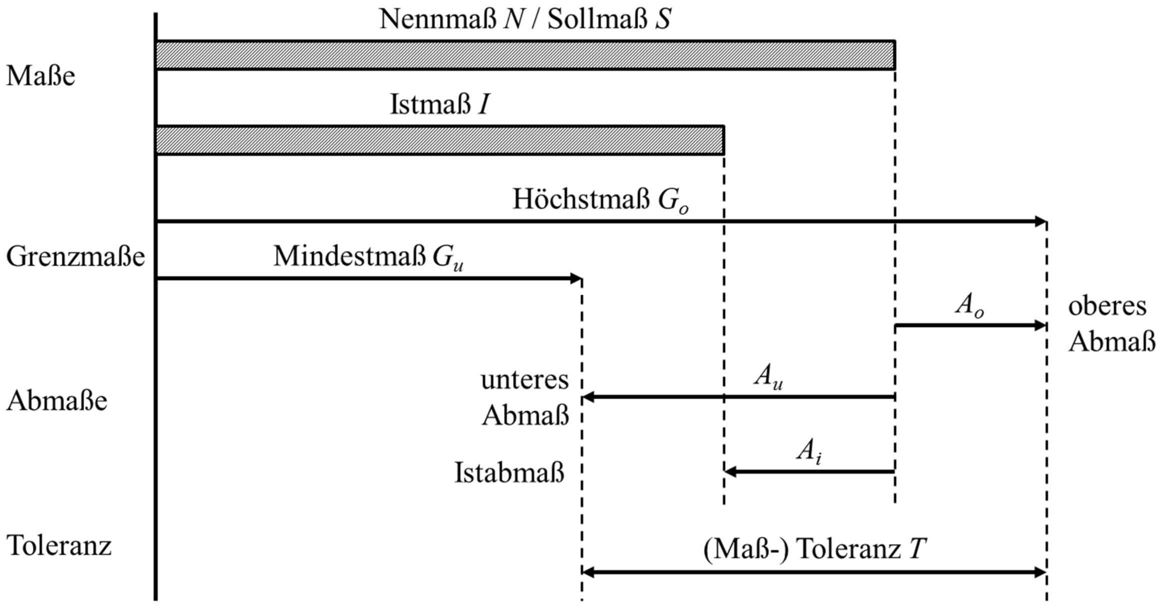

Abb. 3: Toleranzen und Abmaße, angelehnt an Witte und Sparla (2015, S. 696)

4. Ableitung der Standardabweichung aus der Maßtoleranz

Die Sollmaße sowie oberes und unteres Abmaß sind aus der Konstruktion der Maschine oder des Bauwerks bekannt. Damit liegt auch die einzuhaltende Maßtolerenz fest. Wie aus diesen Angaben die Standardabweichung des Messverfahrens zur Realisierung der Maschine oder des Bauwerks abgeleitet werden kann, wird nachfolgend dargestellt. Aus diesen Darstellungen resultiert auch unmittelbar die Entscheidung, welches Messverfahren zur Lösung der Aufgaben eingesetzt werden sollte.

Zunächst ist dabei zu bedenken, dass nach dem Messprozess noch weitere Schritte bis zur fertigen Maschine oder bis zum fertigen Bauwerk folgen. Bspw. ist die Maschine noch an den zuvor messtechnisch bestimmten Punkten zu fixieren, oder auf den messtechnisch bestimmten Punkten ist eine Schalung zu errichten, um anschließend ein Betonbauwerk zu erstellen. Diese nachfolgenden Prozesse sind auch nicht frei von geometrischen Unsicherheiten, so dass die zugelassene Maßtoleranz nicht allein vom Messprozess in Anspruch genommen werden kann. Die Maßtoleranz T wird daher in die beiden Anteile Vermessungstoleranz T_M und Ausführungstoleranz T_A aufgeteilt. Rechnerisch wird bei der Aufteilung davon ausgegangen, dass bei Vermessung und Ausführung die zufälligen Abweichungen überwiegen und beide Anteile unabhängig voneinander sind. Dieses rechtfertigt im Sinne der Statistik eine quadratische Fortpflanzung beider Anteile:

$$T^2 = T_M^2 + T_A^2. \tag{4}$$

Bei der Aufteilung ist es üblich, für T_M einen prozentualen Anteil p der Maßtoleranz T anzusetzen, bzw. $1-p$ für T_A. Aus Gl. 4 ergibt sich dann

$$T_M^2 = T^2 - T_A^2 = T^2 - \big((1-p)\cdot T\big)^2 = T^2 \cdot (1-(1-p)^2). \tag{5}$$

Bspw. erhält man für p = 10% für die Vermessungstoleranz $T_M = 0.44 \cdot T$. Die Festlegung des prozentualen Anteils p mag schwierig erscheinen und birgt auch Konfliktpotenzial zwischen den für die Messungen und den für die Ausführung zuständigen Personen. Es wird aber weiter unten gezeigt, dass das Endergebnis kaum von p abhängt.

Mit p liegt auch T_M fest. Diese Vermessungstoleranz wird nun mit dem Vertrauensintervall aus Gl. (3) oder Gl. (4) gleichgesetzt, wobei sehr sorgfältig über die Irrtumswahrscheinlichkeit α und damit den Faktor k zu verfügen ist (s.o.: Risikoabschätzung bzw. Messaufwand vs. Nachbesserungsaufwand). Es ergibt sich dann

$$T_M = 2 \cdot k \cdot \sigma \;\Longrightarrow\; \sigma = \frac{T_M}{2 \cdot k}. \tag{6}$$

Bspw. erhält man für p = 10% und α = 5% für die Standardabweichung $\sigma = 0.11 \cdot T$.

Die Berechnung von σ aus der Maßtoleranz T hängt also von p und von α ab. Nachfolgende Tabelle 1 soll verdeutlichen, dass der Einfluss von α wesentlicher ist als der von p.

p	T_M/T	σ/T (95.0%)	σ/T (99.7%)
0.1	0.44	0.11	0.07
0.2	0.60	0.15	0.10
0.3	0.71	0.18	0.12
0.5	0.87	0.22	0.15
0.8	0.98	0.24	0.17
0.9	0.99	0.25	0.17

Tabelle 1: σ/T für verschiedene prozentuale Anteile p in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit $1\text{-}\alpha$

In Tabelle 1 ist das Verhältnis von Standardabweichung σ zu Maßtoleranz T für verschiedene prozentuale Anteile p für die Fälle α=5.0% und α=0.3% aufgelistet. Man erkennt, dass sich die Variation von p deutlich abgeschwächt in einer Variation von σ/T niederschlägt. In der Praxis sind prozentuale Anteile zwischen 30% bis 50% üblich. Für diesen Bereich ist σ/T nahezu konstant (siehe Abb. 4), sodass mittlere Werte für σ/T angegeben werden können: 0.20 bei α = 5.0%, 0.16 bei α = 1.0% und 0.13 bei α = 0.3%.

Daher gilt für folgender Zusammenhang zwischen Standardabweichung und Toleranz:

- Für $\alpha = 5.0\%$: $\sigma = \frac{T}{5}$
- Für $\alpha = 1.0\%$: $\sigma = \frac{T}{6}$
- Für $\alpha = 0.3\%$: $\sigma = \frac{T}{8}$

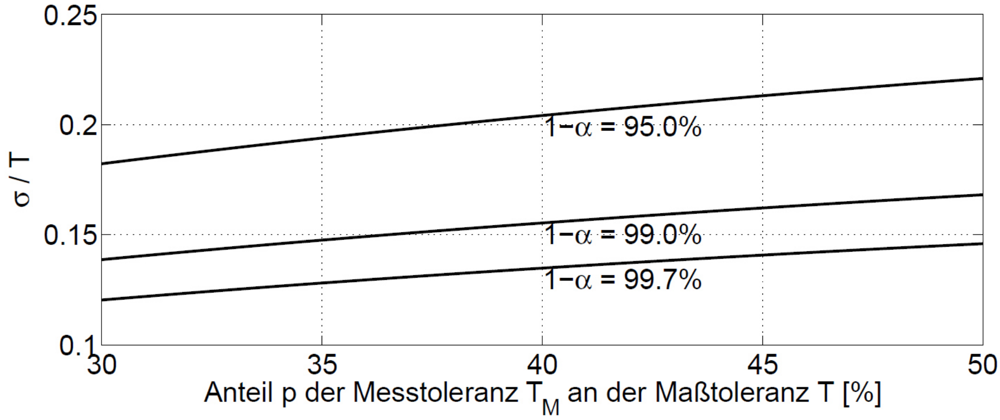

Abb. 4: σ/T für prozentuale Anteile p zwischen 30% und 50%

5. Beispiele

Beispiel 1: Absteckung von Straßen

Die zulässigen Abmaße (unteres Abmaß A_u und oberes Abmaß A_o) für die Lageposition der Achspunkte liegen laut der ZTV Verm-StB 01 Bauvermessung im Straßen- und Brückenbau bei +/- 40 mm. Daraus ergibt sich entsprechend Abb. 2 eine Maßtoleranz von T = 80 mm. Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α = 5.0% folgt aus Kapitel 4 unmittelbar eine maximal zulässige Standardabweichung der Lagemessung von σ = 16 mm. Für α = 1.0% liegt diese bei $\sigma \approx$ 13 mm und für α = 0.3% bei σ = 10 mm.

Falls die Risikoabschätzung eine Irrtumswahrscheinlichkeit von α = 5.0% zulässt, folgt daraus, dass zur Absteckung ein Tachymeter mittlerer Genauigkeit verwendet werden sollte. Die Zielweiten sollten nicht länger als 1 km sein und ein Lotstab mit Prisma zur Punktvermarkung sollte ausreichend sein. Falls die Risikoabschätzung eine Irrtumswahrscheinlichkeit α < 5.0% verlangt, muss das Messverfahren entsprechend angepasst werden. Dies ist z.B. durch Nutzung eines Tachymeters höherer Genauigkeit, genauere Punktsignalisierungen oder kürzere Zielzweiten möglich.

Beispiel 2: Positionierung von Kranbahnen

Bei der Positionierung von Kranbahnen im Stahlbau wird für die Masstoleranzen die SIA 263/1 herangezogen. Die Toleranz der Höhenabweichung der Trägerbahnen liegt bei T = 10 mm. Bei einem Vertrauensintervall mit $\alpha = 5\%$ folgt eine Standardabweichung von $\sigma = 2$ mm.

Es ist nicht unüblich, dass Stahlhallen ca. 30 m lang sind. Das Messinstrument, welches Verwendung finden kann, wäre demnach ein auf Baustellen übliches Nivelliergerät mit einer Standardabweichung von 1.2 mm über einer Strecke von 30 m.

6. Schlussfolgerung

Zur Ableitung der Standardabweichung σ, die die Genauigkeit des eingesetzten Messverfahrens charakterisiert, aus der Maßtolerenz, die sich aus den funktionellen Anforderungen der Maschine oder des Bauwerks ergibt, lässt sich folgender Ablauf festhalten:

- Berechnung der Maßtoleranz aus T aus den zulässigen Abmaßen.
- Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit α (Risikoabschätzung bzw. Messaufwand vs. Nachbesserungsaufwand).
- $\alpha = 5.0\% \Rightarrow \sigma = \frac{T}{5}$, $\alpha = 1.0\% \Rightarrow \sigma = \frac{T}{6}$, $\alpha = 0.3\% \Rightarrow \sigma = \frac{T}{8}$.
- Auswahl des geeigneten Messverfahrens mit einer Genauigkeit σ.

Literatur

Zur besseren Lesbarkeit sind die relevanten Literaturstellen nicht im Fließtext, sondern erst hier aufgelistet. Dabei gibt DIN 18710-1 den besten Einstieg.

DIN 1319-1: Grundlagen der Messtechnik – Teil 1: Grundbegriffe.

DIN 1319-3: Grundlagen der Messtechnik – Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Messgröße, Messunsicherheit.

DIN 18202: Toleranzen im Hochbau – Bauwerke.

DIN 18709-4: Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen in der Geodäsie – Teil 4: Ausgleichungsrechnung und Statistik.

DIN 18710-1: Ingenieurvermessung – Teil 1: Allgemeine Grundlagen.

DIN 55350-13: Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik; Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnissen.

DIN EN ISO 286-1: Geometrische Produktspezifikation – ISO-Toleranzsysteme für Längenmaße – Teil 1: Grundlagen für Toleranzen, Abweichungen und Passungen.

Witte, B. und Sparla, P. (2015): Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen, 8. Auflage, Wichmann Verlag, Heidelberg

Impressum

Herausgeber

DVW - Gesellschaft für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement e.V.

Geschäftsstelle

D-79235 Vogtsburg

Telefon: +49 7662/949287

Fax: +49 7662 / 949288

E-Mail: christiane.salbach@dvw.de